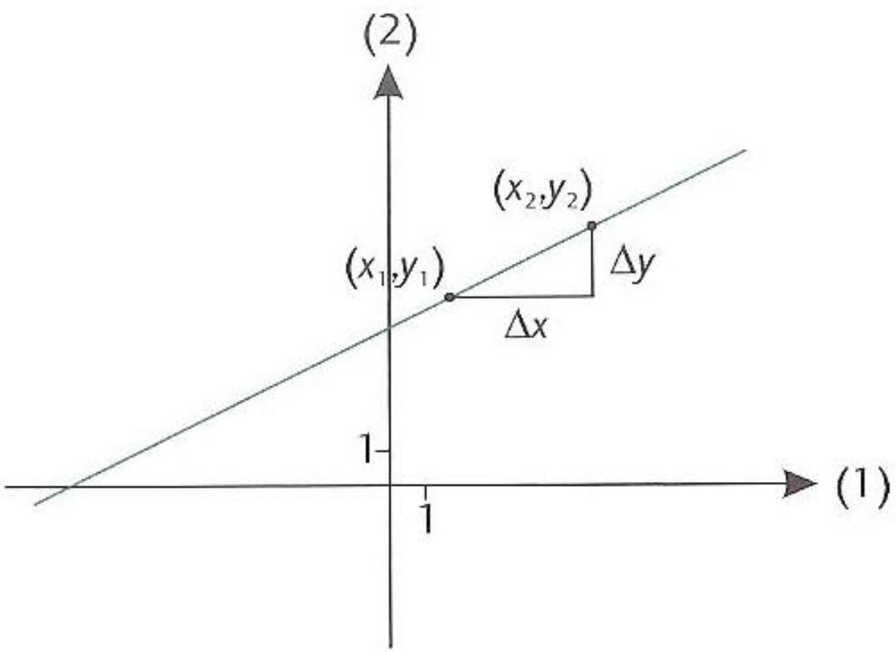
Differentialregning 2.lektion

2x MA

September 2012

Hældningskoefficienter

Hvor stejl er linjen?



Husk:

$$(x_1, y_1) = \left(x_1, f(x_1)\right)$$

og

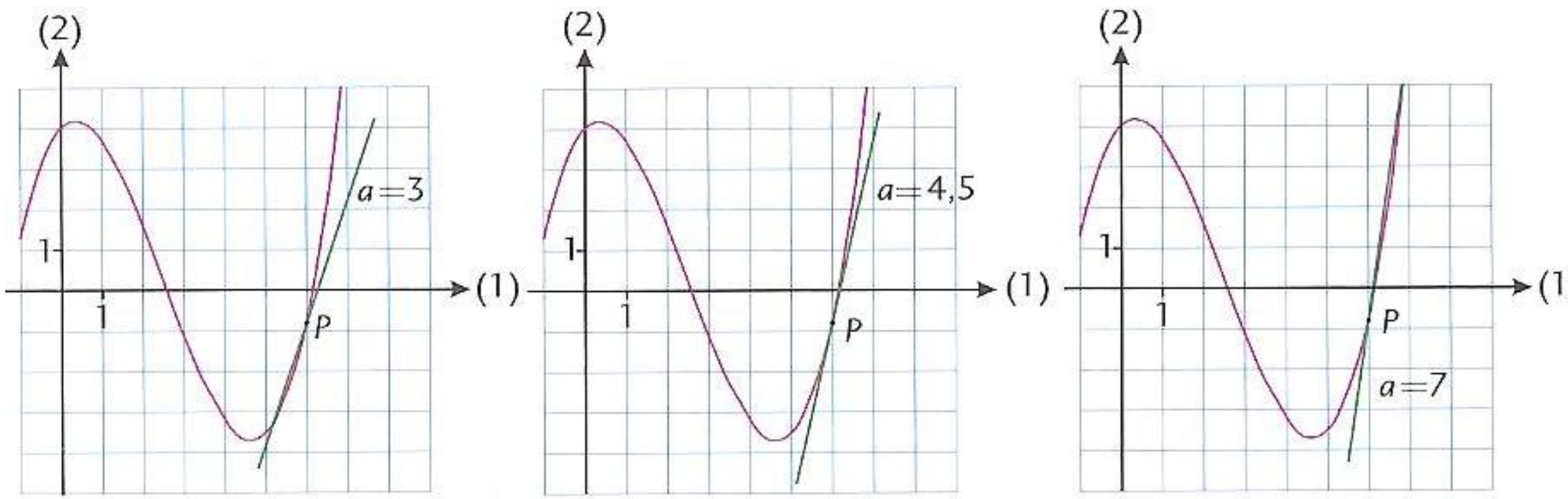
$$(x_2, y_2) = \left(x_2, f(x_2)\right)$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Denne brøk kaldes for ***differenskvotient***

Du skal kende to punkter for at bestemme stejlheden (hældningskoefficienten).

Hvor stejl er den røde kurve i punktet P?



a=4,5 ser ud til at være et godt bud

Vi ønsker en mere præcis bestemmelse af stejlheden.

Derfor skal vi kende forskriften for den røde kurve.

Forskriften for den røde kurve er $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 4}$ og førstekoordinaten til punktet P er 6, dvs. vi kender kun ét punkt, nemlig (6, f(6)).

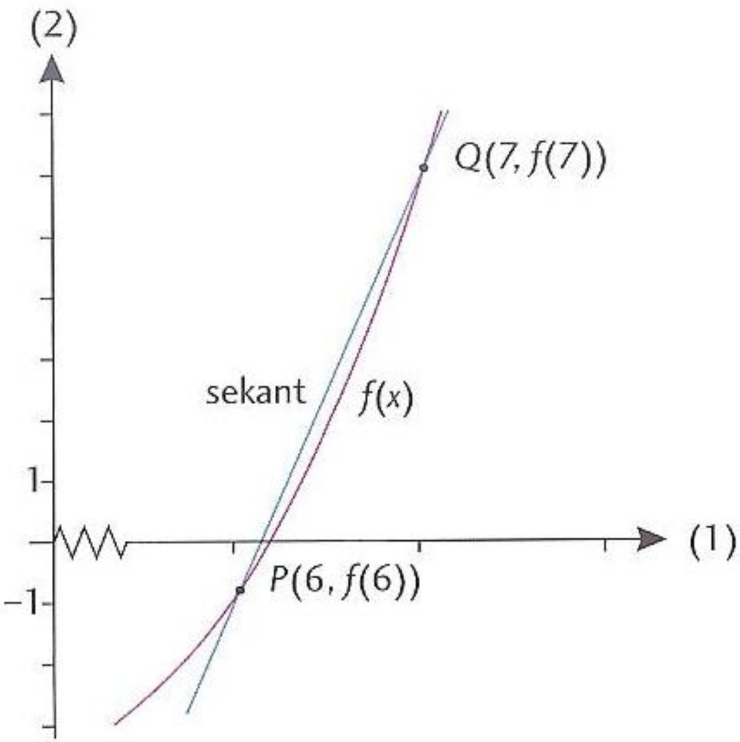
Vi kan anvende differenskvotienten:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

MEN: Hvordan kan man finde kurvens stejlhed i P når vi kun kender ét punkt?

Der zoomes ind på den røde kurve omkring punktet P, hvor x=6

Der vælges et andet punkt Q, og linjen gennem P og Q tegnes (den blå linje). Denne linje kaldes en ***sekant***.



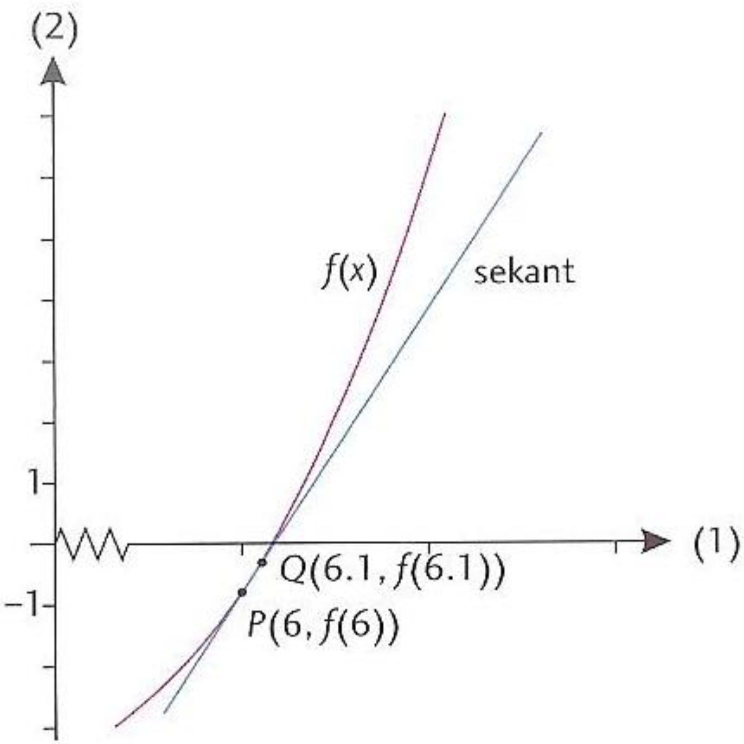
$$\boldsymbol{f(6) = \frac{1}{5}6^3 - \frac{3}{2}6^2 + 6 + 4 = -0,8}$$

$$\boldsymbol{f(7) = \frac{1}{5}7^3 - \frac{3}{2}7^2 + 7 + 4 = 6,1}$$

Ved at anvende differenskvotienten fås:

$$a_{PQ} = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} = \frac{6{,}1 - (-0{,}8)}{7 - 6} = \mathbf{6,9}$$

Nu flyttes punktet Q så det kommer tættere på punktet P (det er stadigvæk en sekant):



$$\boldsymbol{f(6) = \frac{1}{5}6^3 - \frac{3}{2}6^2 + 6 + 4 = -0,8}$$

$$\boldsymbol{f(6,1) = \frac{1}{5}6,1^3 - \frac{3}{2}6,1^2 + 6,1 + 4 = -0,3188}$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6{,}1) - f(6)}{6{,}1 - 6} = \frac{-0{,}3188 - (-0{,}8)}{6{,}1 - 6} = \boldsymbol{4,812}$$

Og sådan kunne vi blive ved med at rykke punktet Q tættere og tættere på punktet P

Og sådan kunne vi blive ved med at rykke punktet Q tættere og tættere på punktet P

Vælges nu punktet Q med x = 6,001 fås følgende sekanthældning:

$$a_{PQ} = \frac{f(6{,}001) - f(6)}{6{,}001 - 6} = \mathbf{4{,}602}$$

Opgave 1.a:
Nu vælges punktet Q med første koordinaten x = 6,000001. Find hældningen for linjen der går gennem punkterne P (6, f(6))og Q(6,000001, f(6,000001)):

Løsning 1.a:

$$a_{PQ} = \frac{f(6{,}000001) - f(6)}{6{,}000001 - 6} = \mathbf{4{,}600002}$$

Opgave 1.b:

Bestem hældningskoefficienten for den linje der går gennem punkterne P(6,f(6)) og Q(5,999, f(5,999))

Løsning 1.b:

$$a_{PQ} = \frac{f(5{,}999)-f(6)}{5{,}999-6} = \mathbf{4{,}5979}$$

Vi kan med god tilnærmelse konkludere at stejlheden for den røde kurve i punktet P er lig 4,6

$$a_{PQ} = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} = \mathbf{6,9}$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6{,}1)-f(6)}{6{,}1-6} = \mathbf{4,812}$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6{,}001)-f(6)}{6{,}001-6} = \mathbf{4{,}602}$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6{,}000001)-f(6)}{6{,}000001-6} = \mathbf{4{,}600002}$$

$$a_{PQ} = \frac{f(5{,}999)-f(6)}{5{,}999-6} = \mathbf{4{,}5979}$$

Konklusion:

Jo tættere vi kommer på x=6,

jo tættere kommer differenskvotienten $a_{PQ} = \frac{f(x)-f(6)}{x-6}$ på 4,6

Dette skrives på følgende måde: $a_{PQ} = \frac{f(x)-f(6)}{x-6} \to 4{,}6 \quad for \quad x \to 6$

$$a_{PQ} = \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} \rightarrow 4{,}6 \quad for \quad x \rightarrow 6$$

Denne proces, hvor vi har fundet hældningen (a_{PQ}), ved at indsætte x-værdier tættere og tættere på 6, kaldes ***differentiation.***

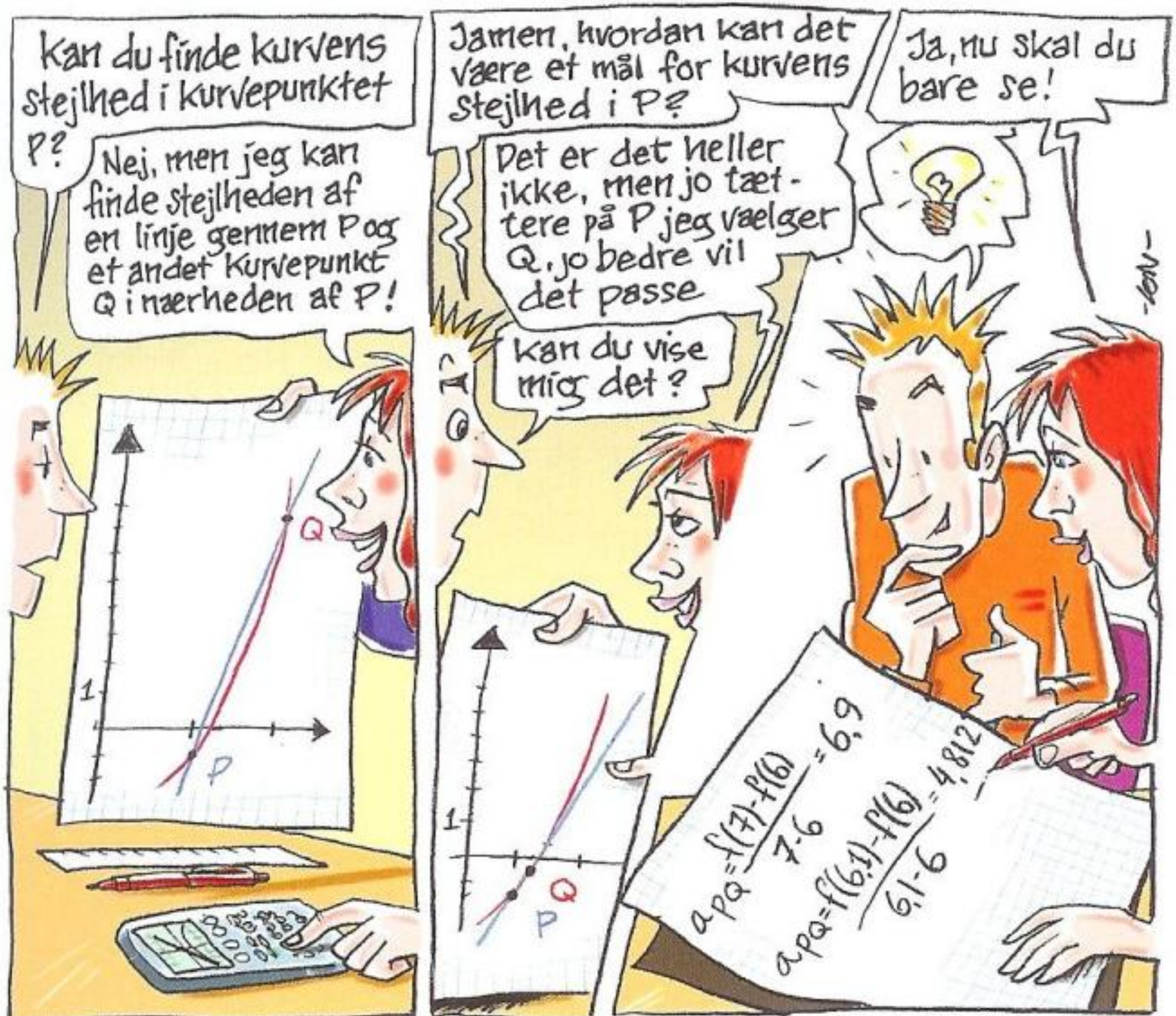
Ved at differentiere bestemmer vi altså hældningskoefficienten i ét punkt.

Mao. vi bestemmer hældningskoefficienten for ***tangenten*** til grafen i punktet x=6

Resultatet af differentiationen (a=4,6) kaldes for ***differentialkvotienten*** i 6 og skrives :

$$\boldsymbol{f'(6) = 4,6}$$

Venstre side læses: ”f mærke af 6”


Kan du finde kurvens stejlhed i kurvepunktet P?
Nej, men jeg kan finde stejlheden af en linje gennem P og et andet kurvepunkt Q i nærheden af P!
1
Q
P
Jamen, hvordan kan det være et mål for kurvens stejlhed i P?
Det er det heller ikke, men jo tættere på P jeg vælger Q, jo bedre vil det passe
Kan du vise mig det?
1
Q
P
Ja, nu skal du bare se!
$a_{PQ} = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} = 6,9$
$a_{PQ} = \frac{f(6,1)-f(6)}{6,1-6} = 4,812$