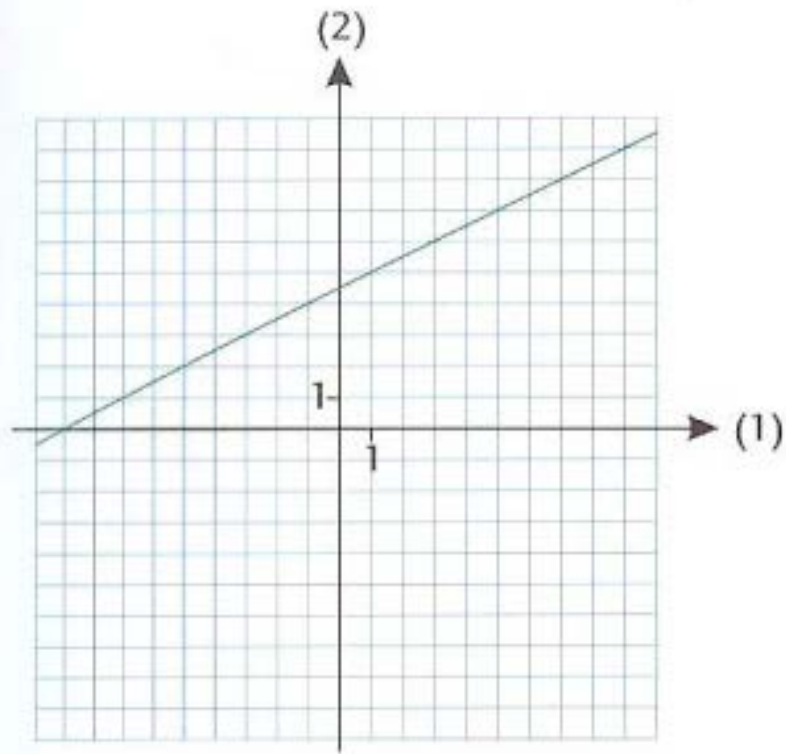


# Differentialregning

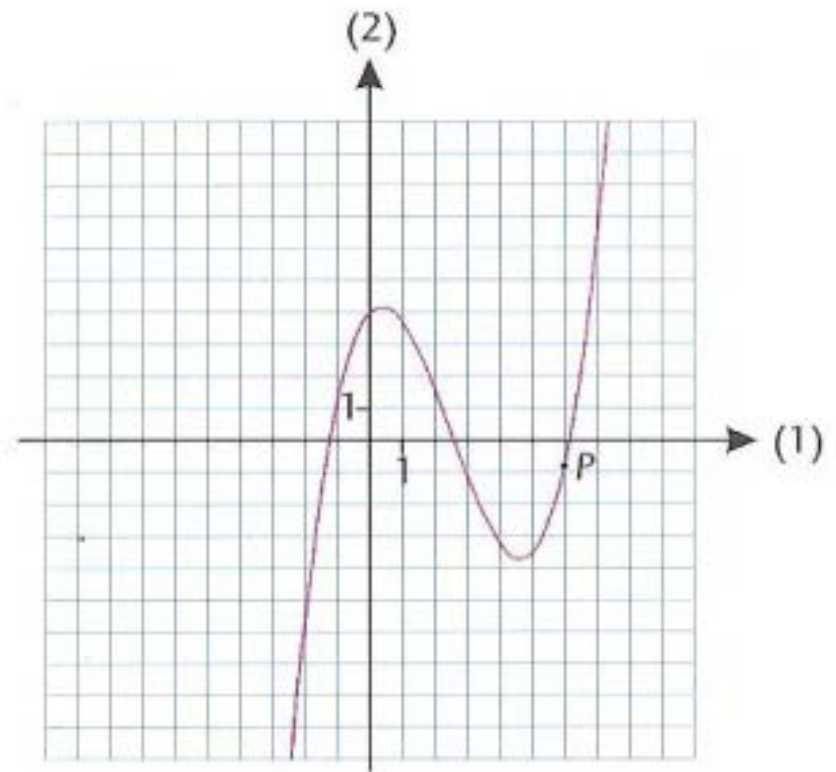
## 1. lektion

2x MA

September 2012



Figur 1:  
Hvor stejl er den blå linje?



Figur 2:  
Hvor stejl er den røde kurve i punktet P?



Figur 3:  
Hvor hurtigt kører cyklisten?

# Eksempel: Cyklistens fart.

**Opgave 1:** Hvor hurtigt kører cyklisten?

Mao. vi ønsker at bestemme cyklistens hastighed.

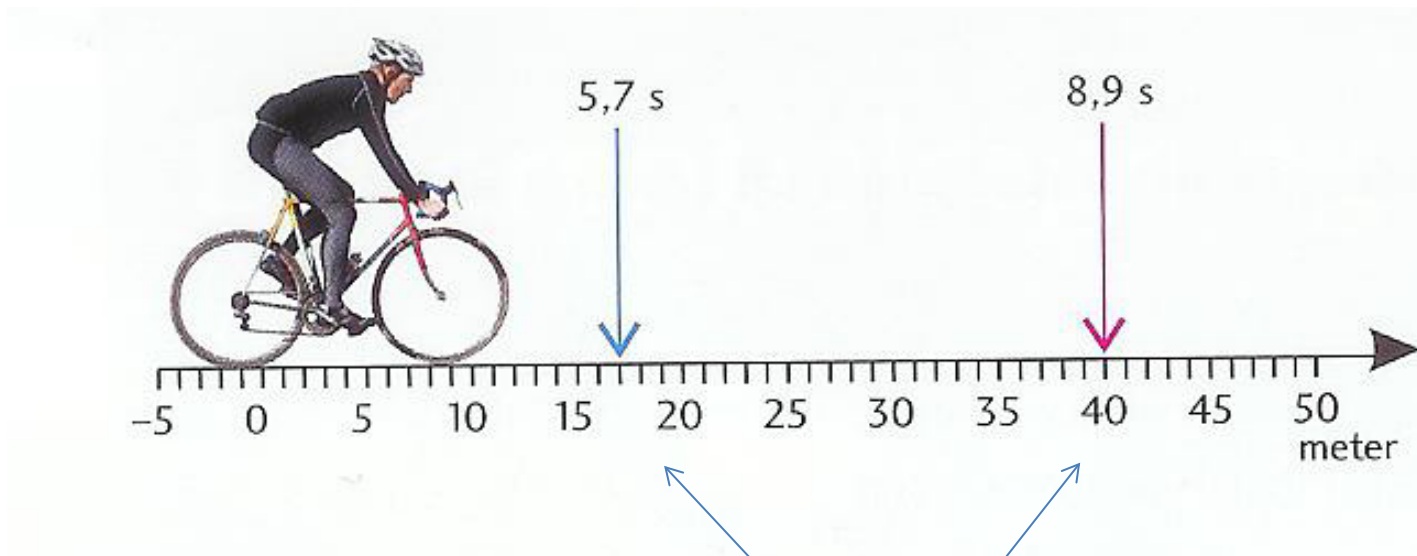
**Løsning:**

Hvilken enhed(er) anvendes for hastighed?

*Enheder:*  $\frac{m}{s}$  eller  $\frac{km}{t}$  m.fl.

Har du en idé om, hvordan man kunne bestemme hastigheden?

Cyklisten kører på en vej, hvor der er en længdemarkering.



To tidtager (en blå og en rød)

Til tidspunktet 5,7 s passerer cyklisten den blå tidtager ved 17 meter-mærket.

Til tidspunktet 8,9 s passerer cyklisten den røde tidtager ved 40 meter-mærket.

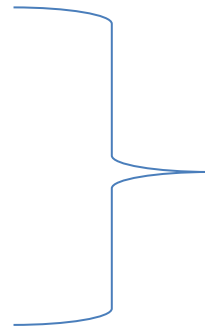
Har du nu en idé om, hvordan man finder cyklistens hastighed ?

Hvad kan du bruge disse oplysninger til ?

Altså:

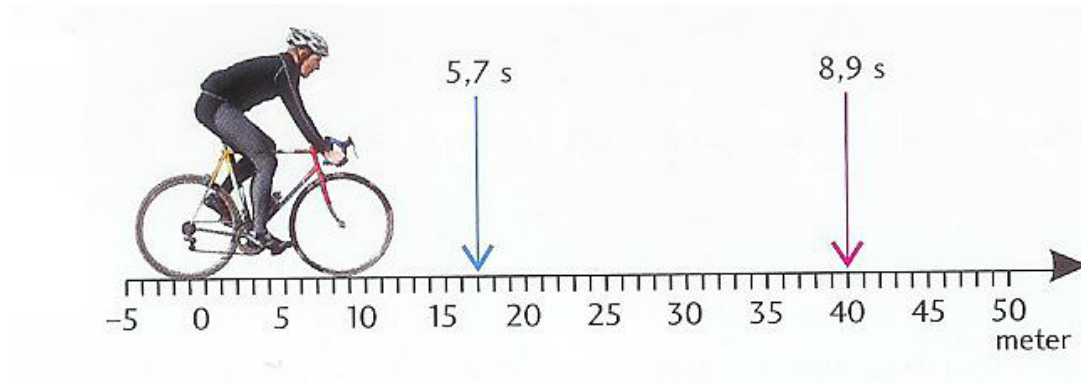
$$40 \text{ m} - 17 \text{ m} = 23 \text{ m}$$

$$8,9 \text{ s} - 5,7 \text{ s} = 3,2 \text{ s}$$



$$\frac{23 \text{ m}}{3,2 \text{ s}} = 7,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Hvad fortæller resultatet  $7,2 \frac{m}{s}$  os?

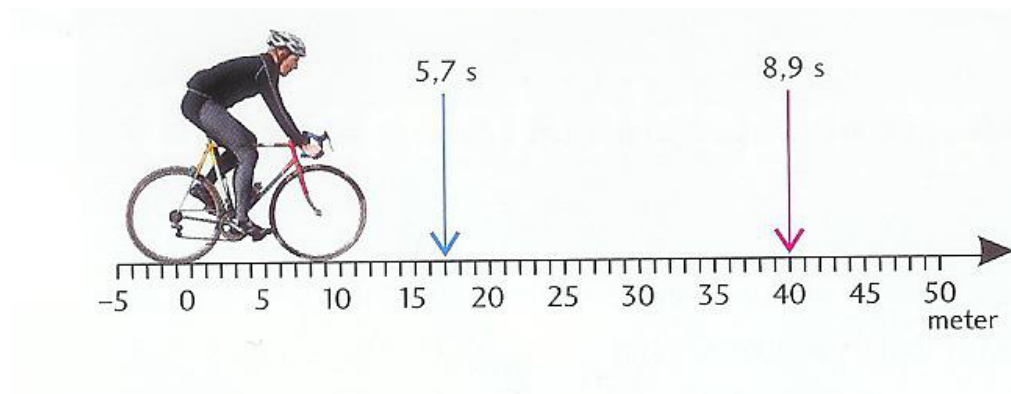


- Er hastigheden  $7,2 \frac{m}{s}$  den samme under hele strækningen?
- Holder cyklisten stille ved 40 meter-mærket?
- Kører cyklisten langsomt mellem 20 meter- og 30 meter-mærket og speeder op til sidst?

Det rigtige svar er, at cyklisten i *gennemsnit* kører med hastigheden  $7,2 \frac{m}{s}$  mellem 17 meter- og 40 meter-mærket.

## Opgave 2:

Hvad nu hvis vi ønsker at bestemme cyklistens hastighed i det øjeblik, hvor han passerer 25 meter-mærket ?



## Løsning:

Ved at placere de to tidtagere tættere på 25 meter-mærket fås følgende målinger:

Tid (s)	6,51	7,05
Sted (m)	23	27

Hvordan vil du bruge disse oplysninger?



Tid (s)	6,51	7,05
Sted (m)	23	27

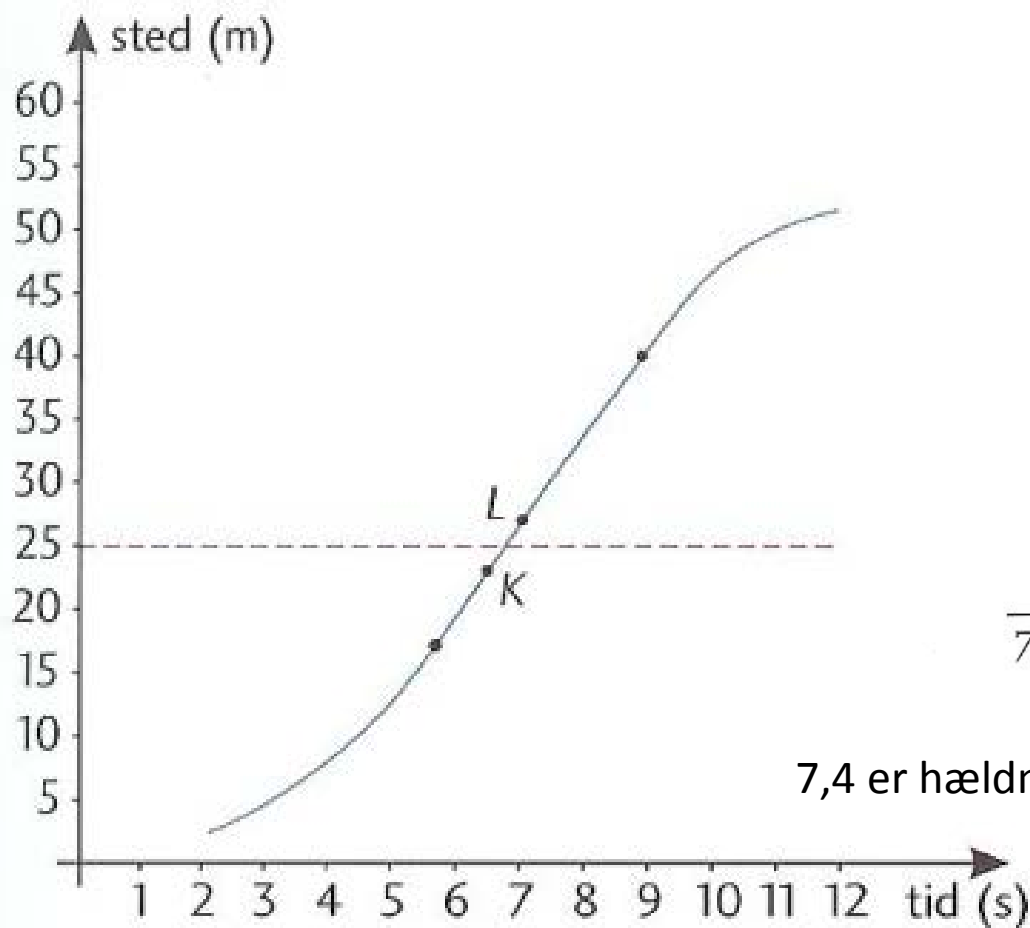
$$\frac{27 - 23}{7,05 - 6,51} \text{ m/s} = 7,4 \text{ m/s.}$$

Husk: Dette er hastigheden mellem 23 meter- og 27 meter-mærket.

**Altså** de  $7,4 \frac{m}{s}$  er gennemsnitshastigheden og ikke den ønskede øjeblikkelige hastighed ved 25 meter-mærket.

Vi ser nu på alle fire målinger:

Tid (s)	5,7	6,51	7,05	8,9
Sted (m)	17	23	27	40



$$\frac{27 - 23}{7,05 - 6,51} \text{ m/s} = 7,4 \text{ m/s.}$$

7,4 er hældningskoefficienten for linjestykket KL

## Hvad er vi kommet frem til?

- Gennemsnitshastigheden er en god tilnærmelse til cyklistens hastighed.
- Hældningskoefficient kan tolkes som en hastighed.

# Differentialregning

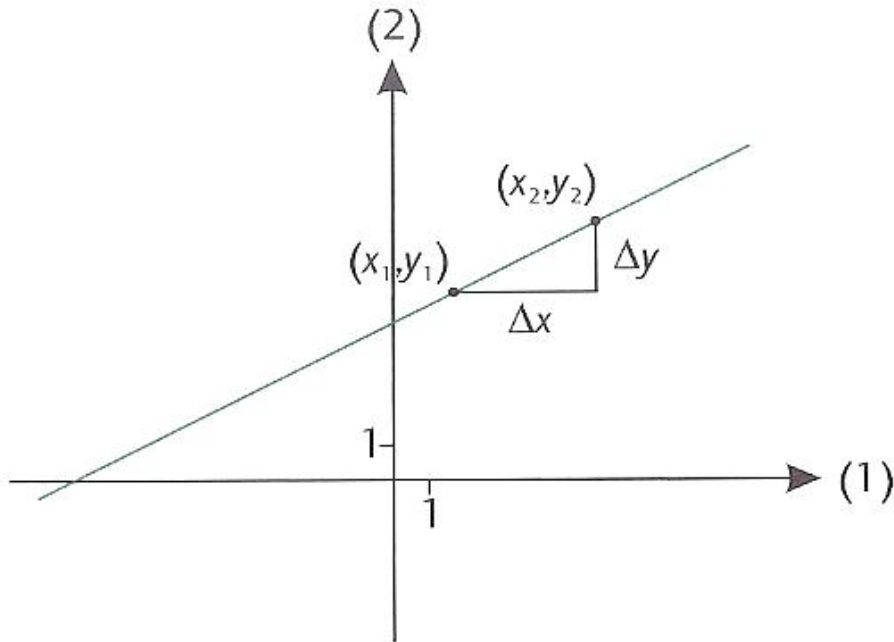
## 2. lektion

2x MA

September 2012

# Hældningskoefficienter

Hvor stejl er linjen?



**Husk:**

$$(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1))$$

og

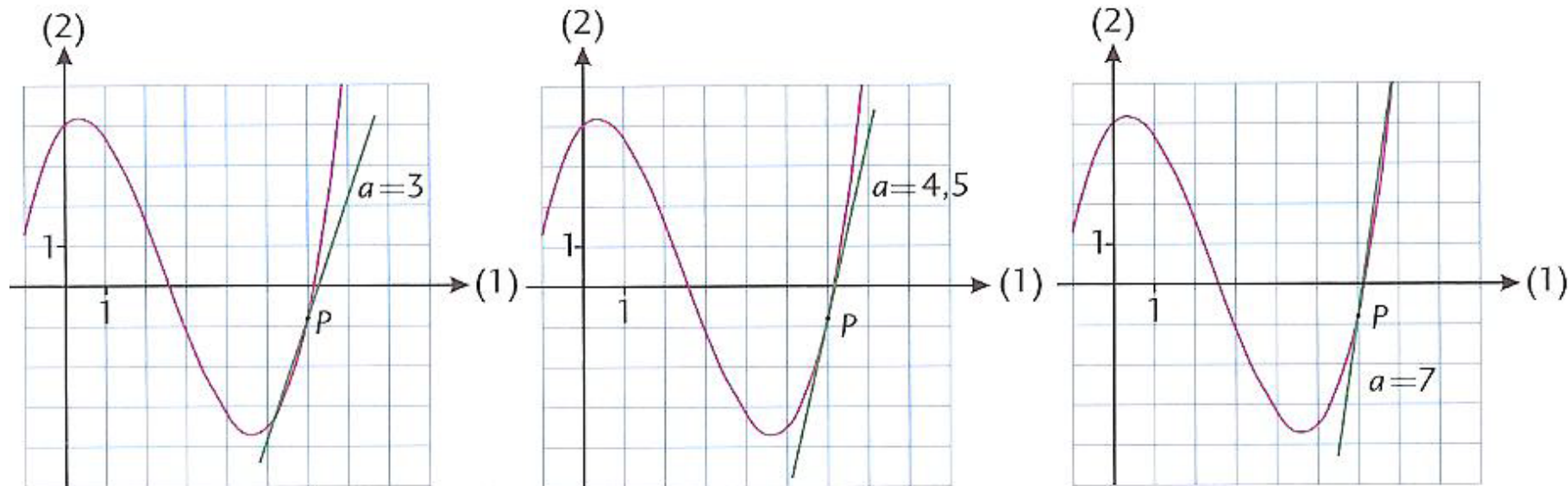
$$(x_2, y_2) = (x_2, f(x_2))$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Denne brøk kaldes for ***differenskvotient***

Du skal kende to punkter for at bestemme stejlheden (hældningskoefficienten).

## Hvor stejl er den røde kurve i punktet P?



$a=4,5$  ser ud til at være et godt bud

**Vi ønsker en mere præcis bestemmelse af stejlheden.**

Derfor skal vi kende forskriften for den røde kurve.

Forskriften for den røde kurve er  $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 4$  og førstekoordinaten til punktet P er 6, dvs. vi kender kun ét punkt, nemlig (6, f(6)).

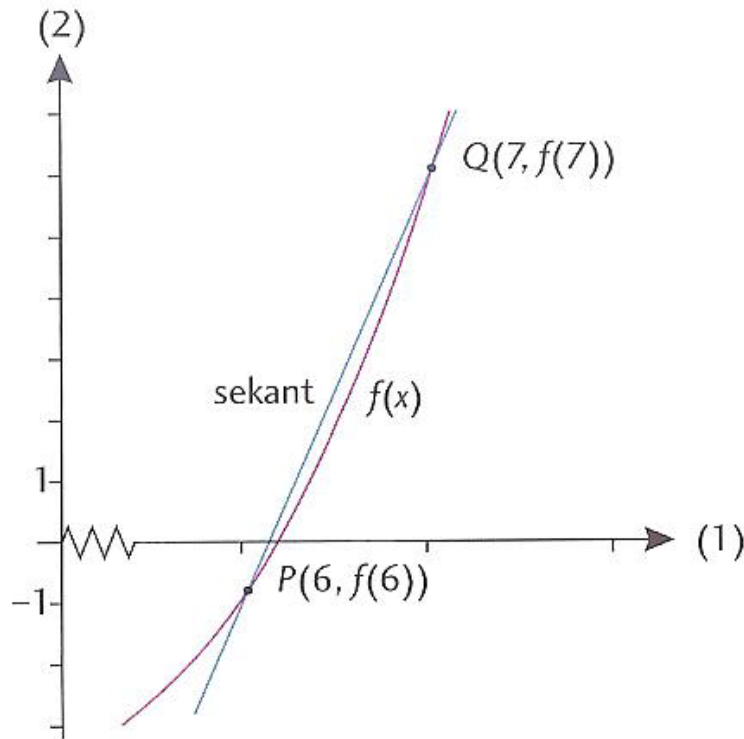
Vi kan anvende differenskvotienten:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

MEN: Hvordan kan man finde kurvens stejlhed i P når vi kun kender ét punkt?

Der zoomes ind på den røde kurve omkring punktet P, hvor  $x=6$

Der vælges et andet punkt Q, og linjen gennem P og Q tegnes (den blå linje).  
Denne linje kaldes en **sekant**.



$$f(6) = \frac{1}{5}6^3 - \frac{3}{2}6^2 + 6 + 4 = -0,8$$

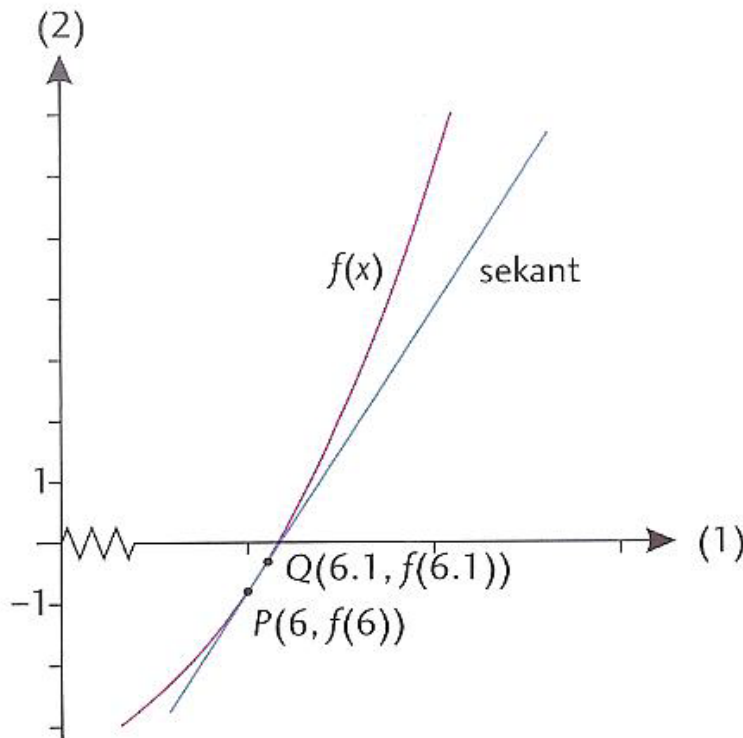
$$f(7) = \frac{1}{5}7^3 - \frac{3}{2}7^2 + 7 + 4 = 6,1$$

Ved at anvende differenskvotienten fås:

$$a_{PQ} = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} = \frac{6,1 - (-0,8)}{7 - 6} = 6,9$$



Nu flyttes punktet Q så det kommer tættere på punktet P (det er stadigvæk en sekant):



$$f(6) = \frac{1}{5}6^3 - \frac{3}{2}6^2 + 6 + 4 = -0,8$$

$$f(6,1) = \frac{1}{5}6,1^3 - \frac{3}{2}6,1^2 + 6,1 + 4 = -0,3188$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6,1) - f(6)}{6,1 - 6} = \frac{-0,3188 - (-0,8)}{6,1 - 6} = 4,812$$

Og sådan kunne vi blive ved med at rykke punktet Q tættere og tættere på punktet P

Og sådan kunne vi blive ved med at rykke punktet Q tættere og tættere på punktet P

Vælges nu punktet Q med  $x = 6,001$  fås følgende sekant-hældning:

$$a_{PQ} = \frac{f(6,001) - f(6)}{6,001 - 6} = \mathbf{4,602}$$

### Opgave 1.a:

Nu vælges punktet Q med første koordinaten  $x = 6,000001$ . Find hældningen for linjen der går gennem punkterne P  $(6, f(6))$  og Q  $(6,000001, f(6,000001))$ :

### Løsning 1.a:

$$a_{PQ} = \frac{f(6,000001) - f(6)}{6,000001 - 6} = \mathbf{4,600002}$$

### Opgave 1.b:

Bestem hældningskoefficienten for den linje der går gennem punkterne P(6, f(6)) og Q(5,999, f(5,999))

### Løsning 1.b:

$$a_{PQ} = \frac{f(5,999) - f(6)}{5,999 - 6} = \mathbf{4,5979}$$

Vi kan med god tilnærmelse konkludere at stejlheden for den røde kurve i punktet P er lig 4,6

$$a_{PQ} = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} = 6,9$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6,1) - f(6)}{6,1 - 6} = 4,812$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6,001) - f(6)}{6,001 - 6} = 4,602$$

$$a_{PQ} = \frac{f(6,000001) - f(6)}{6,000001 - 6} = 4,600002$$

$$a_{PQ} = \frac{f(5,999) - f(6)}{5,999 - 6} = 4,5979$$

***Konklusjon:***

*Jo tettere vi kommer på  $x=6$ ,*

*jo tettere kommer differenskvotienten  $a_{PQ} = \frac{f(x)-f(6)}{x-6}$  på 4,6*

Dette skrives på følgende måte:

$$a_{PQ} = \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} \rightarrow 4,6 \quad \text{for} \quad x \rightarrow 6$$

$$a_{PQ} = \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} \rightarrow 4,6 \quad \text{for} \quad x \rightarrow 6$$

Denne proces, hvor vi har fundet hældningen ( $a_{PQ}$ ), ved at indsætte x-værdier tættere og tættere på 6, kaldes ***differentiation***.

Ved at differentiere bestemmer vi altså hældningskoefficienten i ét punkt.

Mao. vi bestemmer hældningskoefficienten for ***tangenten*** til grafen i punktet  $x=6$

Resultatet af differentiationen ( $a=4,6$ ) kaldes for ***differentialkvotienten*** i 6 og skrives :

$$f'(6) = 4,6$$

Venstre side læses: "f mærke af 6"

Kan du finde kurvens  
stejlhed i kurvepunktet  
P?

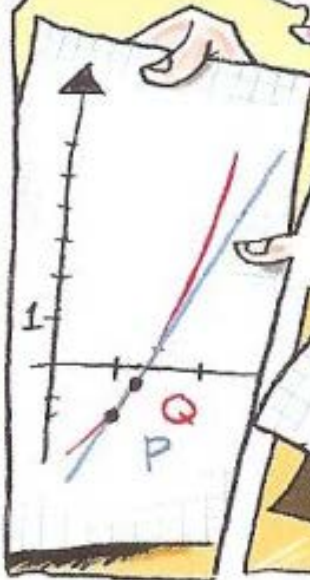
Nej, men jeg kan  
finde stejlheden af  
en linje gennem P og  
et andet kurvepunkt  
Q i nærheden af P!



Jamen, hvordan kan det  
være et mål for kurvens  
stejlhed i P?

Det er det heller  
ikke, men jo tæt-  
tere på P jeg vælger  
Q, jo bedre vil  
det passe

kan du vise  
mig det?



Ja, nu skal du  
bare se!



-10N-