3 trinsreglen

3 trins reglen anvendes når man skal beregne differentialkvotienten $f'(x_0)$ i x_0 .

1.trin Beregning af funktionstilvæksten $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

2.trin Beregning af differenskvotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Differenskvotienten er det samme som hældningen på **sekanten** gennem $(x, f(x))$ og $(x_0, f(x_0))$

Det vil sige $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_{sekant}$

3.trin Undersøg om differenskvotienten går imod et tal når $x \to x_0$. Hvis differenskvotienten går imod et tal så er dette tal det samme som differentialkvotienten i x_0

$$\frac{\Delta y}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$$

og **differentialkvotienten** $f'(x_0)$ er det samme som hældningen på **tangenten** i $f'(x_0) = a_{tangent}$

Vi regner et eksempel:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

Vi skal bestemme $f'(4)$. Det vil sige at $x_0 = 4$ vi skal bestemme hældningen på tangenten i punktet $(4, f(4))$.

1.trin. Beregn funktionstilvæksten $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Først beregnes $f(x_0)$: $(x_0) = f(4) = -(4)^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -7$

Derefter skal en værdi for x vælges. Her vælges $x = 4{,}0001$

$$f(x) = f(4{,}0001) = -(4{,}0001)^2 + 2 \cdot 4{,}0001 + 1 = -7{,}00060001$$

Nu beregnes $\Delta y = f(x) - f(x_0)$:

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(4{,}0001) - f(4) = -7{,}00060001 - (-7) = -7{,}00060001 + 7 = -0{,}00060001$

Altså $\Delta y = -0{,}00060001$

***2.trin**.* Beregn **differenskvotienten** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Vi har bestemt Δy under trin 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-0{,}00060001}{4{,}0001 - 4} = \frac{-0{,}00060001}{0{,}0001} = -6{,}0001$$

Differenskvotienten er altså -6,0001

Husk på at det er det samme som hældningen på sekanten så $a_{sekant} = -6{,}0001$

***3.trin**.* Vi skal undersøge om differenskvotienten $\frac{\Delta y}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nærmer sig et bestemt tal når $x \to 4$

Vi anvender nu $x = 4{,}00001$.

$$f(4{,}00001) = -(4{,}00001)^2 + 2 \cdot 4{,}00001 + 1 = -7{,}00006$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(4{,}00001) - f(4) = -7{,}00006 - (-7) = -7{,}00006 + 7 = -0{,}00006$$

$$\frac{\Delta y}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-0{,}00006}{4{,}00001 - 4} = \frac{-0{,}00006}{0{,}00001} = -6{,}000$$

Altså når $x = 4{,}0001$ så er differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -6{,}0001$$

Og når $x = 4{,}00001$ så er differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-6{,}000$$

Det ser ud til at differenskvotienten nærmer sig værdien -6 når x nærmer sig 4. Eller skrevet med matematiksymboler

$$\frac{\Delta y}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\underset{x\to 4}{\longrightarrow}-6$$

Vi konkluderer at differentialkvotienten i $x_0=4$ er -6.

Det vil altså også sige at tangenthældningen er $a_{tangent}=-6$ i $x_0=4$.

Vi skriver $\boldsymbol{f'(4)=-6}$